§3.2 外测度

Def. $m^*(E) = \inf\{\sum_{k=1}^{+\infty}|I_k| : E \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k, I_k\text{是开区间}\}$. 称为E的外测度.

例1 $m^*(\mathbb{R}) = +\infty$, $m^*(\phi) = 0$

Prop. $m^*(E) \in [0,+\infty]$, $\forall E$

$m^*(E) = a < +\infty \iff \forall I_k, E \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k, a = m^*(E) \le \sum_{k=1}^{+\infty}|I_k|$

$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \{I_k\}$ s.t. $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k$, $\sum_{k=1}^{+\infty}|I_k| < a+\varepsilon$

例2 $\mathbb{R}^1$上单点集的外测度为0.

Pf. 设$E=\{p\}$, $p\in\mathbb{R}$, $\forall \delta>0$, 记$I_\delta = (p-\delta, p+\delta) \supseteq E$

则$|I_\delta| = 2\delta$, $m^*(E) = \inf\{\sum_{k=1}^{+\infty}|I_k| : E \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k, I_k\text{是开区间}\}$

$\le |I_\delta| = 2\delta$

令$\delta\to 0$, $m^*(E) \le 0$, 又有$m^*(E) \ge 0$. $m^*(E) = 0$.

Cor. $\mathbb{R}^n$中也成立, 只需令$I_\delta = \prod_{i=1}^{n}(p_i-\delta, p_i+\delta)$

Prop. (外测度的单调性) 若$E\subseteq F$, 则$m^*(E) \le m^*(F)$.

Pf. 设$E\subseteq F$, 对$\{I_k\}$满足$F \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k$有$E \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k$

于是$m^*(E) \le \inf\{\sum_{k=1}^{+\infty}|I_k| : F \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k\} = m^*(F)$.

例3 (1) $m^*((a,b)) = b-a$

(2) $m^*([a,b]) = b-a$ ($\forall\delta$有$(a+\delta, b-\delta) \subseteq [a,b] \subseteq (a-\delta, b+\delta)$)

(3) $m^*(\prod_{k=1}^{n}(a_k,b_k)) = \prod_{k=1}^{n}(b_k-a_k)$

Rem. 这里对形如$(a,b]$, $[a,b)$的区间也有外测度为$b-a$.

Prop.（外测度的次可加性、分离可加性）

至多可列个互不交集合的并的外测度小于等于每个集合的外测度的和.

至多可列个相互间距离大于0的并的外测度等于每个集合的外测度的和.

Pf. 设 $E_k \subseteq \mathbb{R}^n$, $k=1,2,\cdots$ 且 $E_k\cap E_p=\emptyset$, $\forall k\neq p$

(1) 若 $\sum_{k=1}^{+\infty} m^*(E_k)=+\infty$，则 $m^*(\bigcup_{k=1}^{+\infty}E_k)\le \sum_{k=1}^{+\infty} m^*(E_k)$

(2) 若 $\sum_{k=1}^{+\infty} m^*(E_k)=a<+\infty$，则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists E_{kj}$ 满足 $E_k\subseteq\bigcup_{j=1}^{+\infty}E_{kj}$

s.t. $m^*(E_k)\le\sum_{j=1}^{+\infty}|I_{kj}|\le m^*(E_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}$

于是 $\sum_{k=1}^{+\infty} m^*(\cancel{\bigcup_{k=1}} E_k)+\varepsilon \ge m^*(\bigcup_{k=1}^{+\infty}E_k)$（当 $\varepsilon\to 0$ 时）

对于 $\rho(E_k,E_p)>0$ 的情形：总可以拆成若干小区间

s.t. $(\bigcup_{j=1}^{+\infty}E_{kj})\cap(\bigcup_{j=1}^{+\infty}E_{pj})=\emptyset$.

Prop.（平移不变性）

设 $E\subset\mathbb{R}^n$, $x+E=\{x+y \cancel{\in E} \mid y\in E\}$，则 $m^*(E)=m^*(x+E)$

Pf. 考虑构造 $x+I_k=(x_1+a_1^{(k)},x_1+b_1^{(k)})\times\cdots\times(x_n+a_n^{(k)},x_n+b_n^{(k)})$

于是 $|x+I_k|=\prod_{i=1}^n[(x_i+b_i^{(k)})-(x_i+a_i^{(k)})]=\prod_{i=1}^n(b_i^{(k)}-a_i^{(k)})=|I_k|$

记 $J_k=x+I_k$，则 I_k 与 J_k 一一对应，于是

$m^*(x+E)=\inf\{\sum|J_k|: x+E\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k\}=\inf\{\sum|I_k|:E\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\}$

$=m^*(E)$.

Rem. 外测度不满足可列可加性

例：取 $R_x=[x]=\{y\in(0,1): y-x\in\mathbb{Q}\}$

每个 R_x 中取唯一一个 x 得到 S，考虑 $(0,1)\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\subseteq(-1,2$

记 $m^*(\hat{S}_k)=m^*(\hat{S}_p)=a$，则与 $m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)=\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)$ 矛盾.

(否则 $\sum_{k=1}^{\infty}a$ 介于 1 和 3 之间).